TEORIA dei SEGNALI - SEGNALI DETERMINISTICI

prof. D'Amico

⇒ Lezione del 28/02/2012

- Libri di testo:
  - "Teoria dei segnali analogici", D'Amico, Luise, Vitetta - McGraw Hill
    (copre tutto il programma del corso, ma non la parte di segnali aleatori)
  - "Teoria dei segnali aleatori", Verrazzani, ETS
  - "Teoria dei Segnali", Luise, Vitetta - McGraw Hill ← completo!

Ricevimento: martedì, ore 16.00-18.00

Esame: unico esame con segnali aleatori, scritto con 2 esercizi di det e 2 di aleat.
N.B.: allo scritto non si può usare niente!

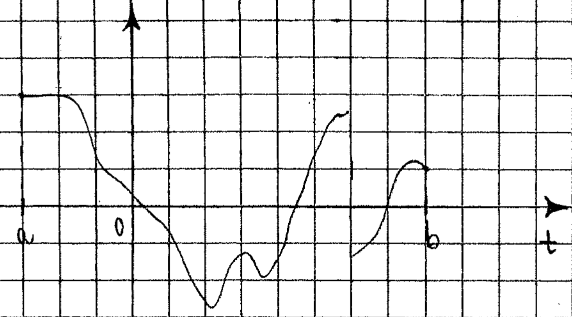
- SEGNALE: qualcosa che porta informazione. In particolare: 1) un segnale è causato dalla variazione di una qualche grandezza in un qualche periodo; 2) un segnale porta un'informazione in genere codificata, di una certa ampiezza/intensità.

es. • l'elettrocardiogramma è un segnale (variazione di tensione degli elettrodi nel tempo)
• una foto in bianco e nero: è associata alla variazione di intensità luminosa al variare del punto nel piano xy (dominio spaziale bidimensionale)

- CLASSIFICAZIONE in base al DOMINIO: ai segnali in generale sono associate delle funzioni; noi ci occuperemo di studiare le $f(t)$, funzioni del TEMPO.

1) SEGNALI TEMPO-CONTINUI: la cardinalità del dominio è la stessa di $\mathbb{R}$; il dominio può essere definito in intervalli, anche discontinui, ma $\subseteq \mathbb{R}$

es.



$f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

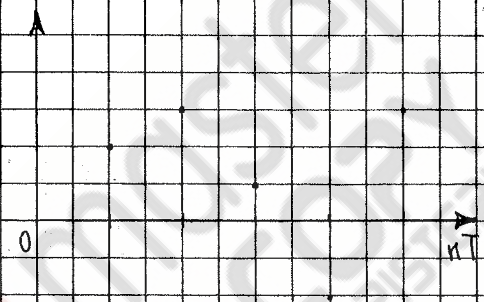
anche discontinua

$\Downarrow$

è tempo-continua perché $[a,b]$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$.

2) SEGNALI TEMPO-DISCRETI: il dominio di definizione è un insieme di cardinalità finita o infinita ma numerabile (cioè stessa cardinalità di $\mathbb{N}$). In pratica altro non sono che successioni.

es.



$f : A \subseteq \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$

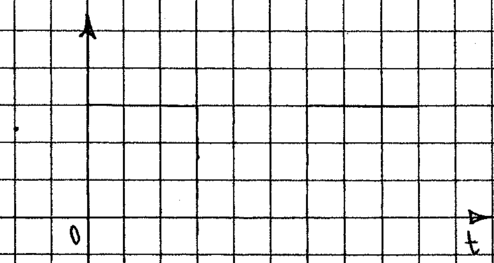
$x[n]$, $z[n]$

- CLASSIFICAZIONE in base al CODOMINIO:

1) SEGNALI ad AMPIEZZA CONTINUA: il codominio ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$

2) SEGNALI ad AMPIEZZA DISCRETA (o QUANTIZZATI): il codominio ha cardinalità finita o infinita ma numerabile.

es.



ONDA QUADRA IDEALE

(è di tipo (1,2))

N.B.: nella realtà è sempre di tipo (1,1)

I segnali di tipo (1,1) si dicono ANALOGICI, mentre quelli di tipo (2,2) si dicono DIGITALI

- CLASSIFICAZIONE rispetto al TEMPO (in particolare per i segnali analogici):

1) PERIODICI: si ripetono ad intervalli di tempo regolari.

$$x(t) = x(t+T) \qquad T = \text{periodo} \qquad \forall t \in A \text{ (dominio)}$$

Si può scrivere anche $x(t) = x(t+KT) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall K \in \mathbb{Z}$

Il PERIODO è l'intervallo MINIMO per cui vale questa proprietà.

2) APERIODICI: $\nexists T \in \mathbb{R}$ t.c. $x(t) = x(t+T) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

- CLASSIFICAZIONE in base alla CAUSALITÀ:

1) CAUSALE: quando è $= 0 \quad \forall t < 0$

2) NON CAUSALE

N.B.: Ovviamente non può essere causale una funzione periodica, mentre lo sono i classici gradino, rampa, impulso, ...

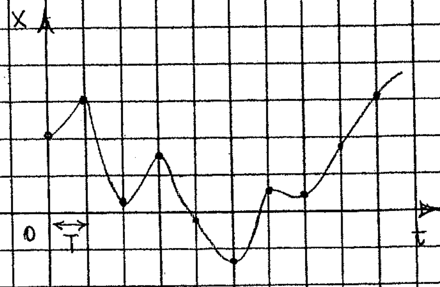
- es. incisione di un CD musicale

1) microfono: traduce la musica (audio) in segnale elettrico, che idealmente dovrebbe essere una riproduzione fedele dell'onda acustica.

2) elaborazione (amplificazione) del segnale analogico

3) campionamento: il segnale analogico è convertito in tempo-discreto

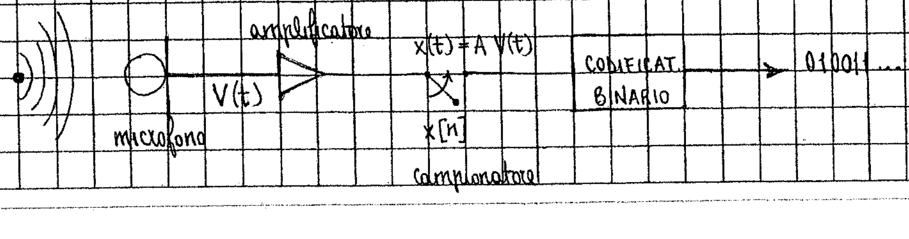
$$x[n] = x(nT)$$



T = periodo di campionamento

per i CD è 44,1 KHz

$\frac{1}{T} = f$ = frequenza di campionamento



4) quantizzazione: ogni campione prelevato avrà un valore reale che viene arrotondato (4)
a un numero di macchina a seconda della profondità in bit.
(Per esempio con due bit un campione può assumere come valori solo
00, 01, 10, 11, cioè i numeri 0, 1, 2, 3)
La profondità standard di un CD è di 16 bit.

N.B.: L'informazione, in linea di principio, si ha non nel campionatore (per Shannon non si avrebbe aliasing), ma nella quantizzazione (è un arrotondamento, per cui c'è un errore inevitabile).

N.B.: Si può trovare un buon compromesso di quantizzazione anche con pochi bit: è il principio alla base del funzionamento della compressione MP3.

- ENERGIA di un SEGNALE

Dato un segnale $x(t)$, si definisce ENERGIA del segnale l'integrale:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\, dt$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \|x(t)\|^2\, dt$$

N.B.: $x(t)$ è analogico cioè $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Lo posso pensare anche come $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, e allora si deve considerare il modulo al quadrato.

ACHTUNG! La definizione è questa se e solo se l'integrale esiste ed è finito.

Perché l'energia viene definita così?

Prendiamo una resistenza R percorsa da una corrente $i(t)$. La potenza sarà $P(t) = R\, i^2(t)$ e:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} R\, i^2(t)\, dt$$

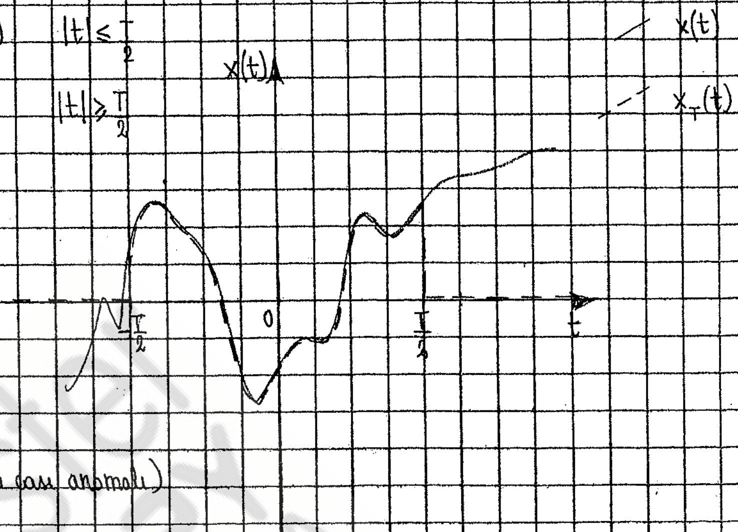
Se immaginiamo R unitaria abbiamo che l'energia è proprio legata all'integrale del quadrato della grandezza che costituisce il segnale, cioè la corrente.
Lo stesso ragionamento si può applicare anche ad altre grandezze, per cui la definizione di energia del segnale data è sensata.

E per i segnali ad energia infinita?

Questi possono essere caratterizzati con la potenza media.

es. preso un segnale $x(t)$ generico opero un troncamento

Si definisce: $x_T(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & |t| \geq \frac{T}{2} \end{cases}$



L'energia del segnale troncato è:

$$E_{x_T} = \int_{-\infty}^{+\infty} \| x_T(t) \|^2 dt < +\infty$$

(a meno di casi anomali)

La potenza media del segnale troncato sarà:

$$P_{x_T} = \frac{E_{x_T}}{T} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \| x_T(t) \|^2 dt$$

Definizione: POTENZA MEDIA del segnale $x(t)$ (non per segnali troncati, ma in generale)

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} P_{x_T} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \| x_T(t) \|^2 dt = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \| x(t) \|^2 dt$$

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{E_{x_T}}{T} \to \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

N.B.: se E_x non tendesse a $+\infty$ mi basterebbe studiare l'energia.

es. $x(t) = A \sin \omega t$

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \sin^2 (\omega t)\, dt \xrightarrow{T \to +\infty} \frac{1}{\cancel{T}} A^2 \cdot \frac{\cancel{T}}{2} = \frac{A^2}{2}$$

(pongo $T = K \cdot \frac{2\pi}{\omega}$ e mando K all'infinito)

Si noti come questo segnale abbia energia infinita.

ACHTUNG! Ci sono anche altri segnali che hanno sia energia sia potenza infinita.